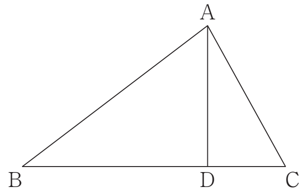
第19講　三平方の定理の利用

Step 1

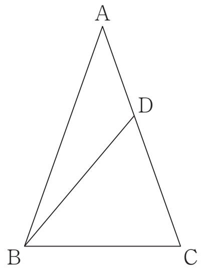
1 次の問いに答えなさい。

(1) 右の図のように，△ABCの辺BC上に点Dがあり，∠CAD = 30°，AD ⊥ BCです。AB = 3 cm，AC = 2 cmのとき，辺BCの長さは何cmですか。



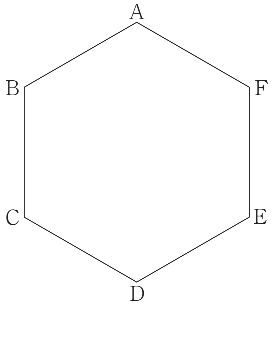
【広島県】

(2) 右の図で，三角形ABCはAB = AC = 6 cm，BC = 4 cmの二等辺三角形であり，点Dは辺AC上の点である。線分BDの長さが最も短くなるとき，線分BDの長さを求めなさい。



【秋田県】

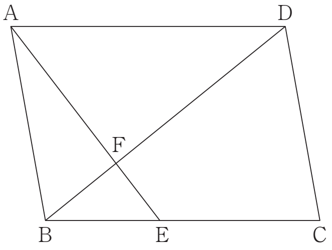
2 右の図のように，1辺が4 cmの正六角形ABCDEFがあります。正六角形ABCDEFの頂点A，C，Eを結んでできる三角形の面積を求めなさい。



【北海道】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　右の図のように，平行四辺形 ABCD の辺 BC 上に点 E があり，線分 AE と対角線 BD との交点を F とします。AF = CE, ∠AFD = 90°，AD = 5 cm，BE = 2 cm のとき，線分 BF の長さは何 cm ですか。



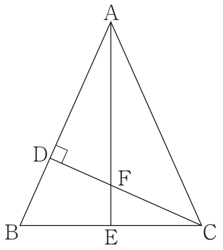
【広島県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製·転載を禁止します。

Step　2

4　図で，△ABC は AB = AC の二等辺三角形，D は辺 AB 上の点で，AB ⊥ DC であり，E は辺 BC の中点である。また，F は線分 DC と AE との交点である。

AB = 9 cm，BC = 6 cm のとき，次の①，②の問いに答えなさい。



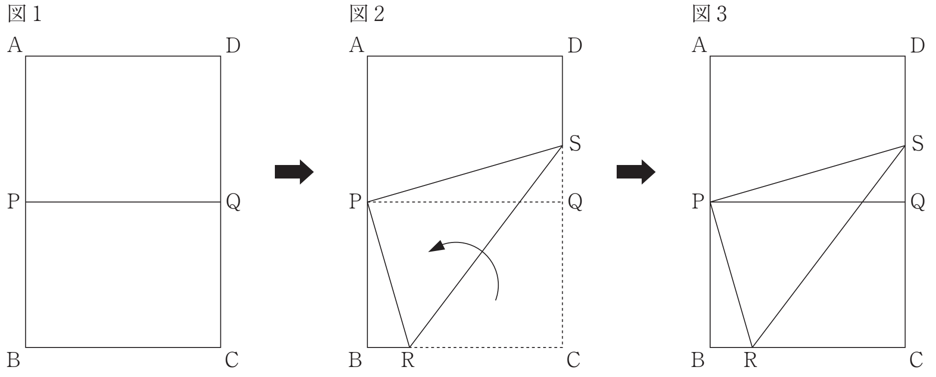
①　線分 DB の長さは何 cm か，求めなさい。

②　四角形 DBEF の面積は何 cm^2 か，求めなさい。

【愛知県】

5　下の図１のように AB = 6 cm，BC = 4 cm である長方形 ABCD の紙がある。辺 AB，CD の中点をそれぞれ P，Q とし，２点 P，Q を結ぶ。次に，図２のように，点 C が点 P に重なるように折り，折り目と辺 BC，CD との交点をそれぞれ R，S とする。図３は，図２の折った部分をもとにもどし，点 P と点 R，S をそれぞれ結んだものである。

このとき，次の(Ⅰ)，(Ⅱ)について，［ア］には当てはまる最も簡単な整数の比を，［イ］，［ウ］には当てはまる値をそれぞれ書きなさい。



(Ⅰ)・△PBR ∽ △PQS である。

・△PBR と△PQS の面積の比は，［ア］である。

(Ⅱ)　PS の長さを x cm とするとき，

・QS の長さを x を使った式で表すと，(x − ［イ］) cm である。

・x の値を求めると，PS = ［ウ］ cm である。

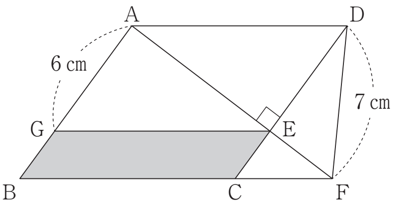
【茨城県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step　3

6　右の図のような，平行四辺形ABCDがあり，点Aから辺CDに垂線をひき，その交点をEとする。直線AEと直線BCとの交点をFとし，点Dと点Fを結ぶ。辺AB上に，CE = BGとなる点Gをとり，点Eと点Gを結ぶ。

AG = 6cm，DF = 7cmであるとき，四角形BCEGの面積は何cm^{2}か。



【香川県】

7　辺ABが辺BCより短い長方形ABCDがあり，BC = 10cmである。長方形ABCDと合同な長方形PQRSを，頂点A，B，C，Dにそれぞれ頂点P，Q，R，Sが一致するように重ね，図1～図3のように，点Sを中心として反時計回り（矢印の方向）に回転させる。下の(1)，(2)の問いに答えなさい。ただし，円周率をπとする。

図1

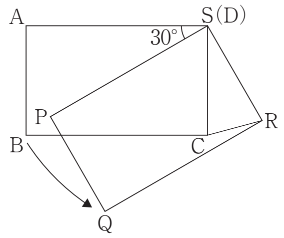


図2

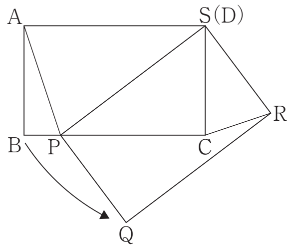
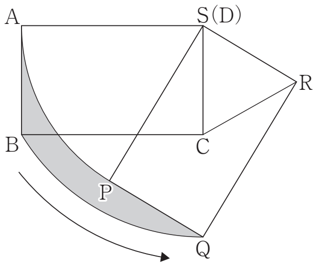


図3



(1)　図1のように，30°回転させ，点Cと点Rを線分で結ぶとき，∠CRQの大きさを求めなさい。

(2)　点Pが辺BC上にあるとき，BP = 2cmである。

①　図2のように，点Pが辺BC上にくるまで回転させたとき，△SAPの面積は，△SCRの面積の何倍か，求めなさい。

②　図3のように，はじめてCS = CRとなる位置まで回転させた。このとき，点Pが点Aから描（えが）いた線，点Qが点Bから描いた線，線分AB，線分PQによって囲まれた部分の面積を求めなさい。

【秋田県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　三平方の定理の利用

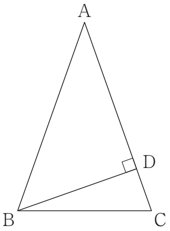
Step 1

1　(1) $1+\sqrt{6}$ (cm)　(2) $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ (cm)

≪解説≫

(1) △ACD は 30°，60° の角をもつ直角三角形だから，$DC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times2=1$ (cm)，$AD=\sqrt{3}DC=\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$ (cm)　△ABD に三平方の定理を用いると，$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$ (cm)　よって，$BC=DC+BD=1+\sqrt{6}$ (cm)

(2) 右図のように，BD ⊥ AC となるとき，線分 BD の長さが最も短くなる。CD = x cm として，△BCD と△BAD で三平方の定理より，BD^2 を 2 通りに表すと，$4^2-x^2=6^2-(6-x)^2$ が成り立つ。これを解くと，$x=\dfrac{4}{3}$ だから，$BD^2=4^2-\left(\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{128}{9}$　BD ＞ 0 より，$BD=\sqrt{\dfrac{128}{9}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ (cm)



2　$12\sqrt{3}$ (cm^2)

≪解説≫

△BAC は BA = BC，頂角 120° の二等辺三角形。点 B から AC にひいた垂線を BH とすると，△CBH は 30°，60° の直角三角形だから，$BH=\dfrac{1}{2}BC=2$ (cm)，$CH=\sqrt{3}BH=2\sqrt{3}$ (cm)，$AC=2CH=4\sqrt{3}$ (cm)となる。AE，CE も同様に $4\sqrt{3}$ cm だから，△ACE は 1 辺が $4\sqrt{3}$ cm の正三角形。よって，高さは，$4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$ (cm)より，求める面積は，$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times6=12\sqrt{3}$ (cm^2)

3　$\dfrac{8}{5}$ (cm)

≪解説≫

$CE=BC-BE=5-2=3$ (cm)より，$AF=CE=3$ cm　$DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (cm)　△AFD ∽ △EFB で相似比は 5 : 2 だから，$BF=4\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{8}{5}$ (cm)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step　2

4　① 2 (cm)　② $\dfrac{23\sqrt{2}}{8}$ (cm^2)

≪解説≫

① △ABCは二等辺三角形で，Eが辺BCの中点なので，∠AEB = 90°　△CBDと△ABEで，∠Bは共通，∠CDB =∠AEB = 90°より，2組の角がそれぞれ等しいので，△CBD∽△ABEとなり，DB : EB = BC : BA　よって，DB : 3 = 6 : 9となり，9DB = 18より，DB = 2 (cm)

② △CBDにおいて，CD = $\sqrt{BC^2 - DB^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ (cm)　△CBDと△CFEで，∠BCD =∠FCE，∠CDB =∠CEF = 90°より，2組の角がそれぞれ等しいので，△CBD∽△CFEとなり，CD : CE = DB : EF　したがって，$4\sqrt{2} : 3 = 2 :$ EFとなり，$4\sqrt{2}$EF = 6より，EF = $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ (cm)　よって，四角形DBEF =△CBD −△CFE = $\dfrac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2 - \dfrac{1}{2} \times 3 \times \dfrac{3\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2} - \dfrac{9\sqrt{2}}{8} = \dfrac{23\sqrt{2}}{8}$ (cm^2)

5　ア．9 : 16　イ．3　ウ．$\dfrac{25}{6}$

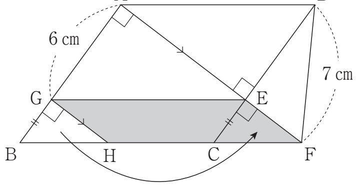
≪解説≫

△PBR∽△PQSで，PB = $\dfrac{1}{2}$AB = $\dfrac{1}{2} \times 6 = 3$ (cm)，PQ = BC = 4 cm　よって，△PBRと△PQSの相似比は3 : 4だから，面積比は，$3^2 : 4^2 = 9 : 16$　また，PS = x cmとすると，CS = PS = x cmだから，QS = CS − CQ = $x - 3$ (cm)　△PQSに三平方の定理を用いて，$PS^2 = PQ^2 + QS^2$より，$x^2 = 4^2 + (x-3)^2$　展開して整理すると，$6x = 25$　よって，$x = \dfrac{25}{6}$

Step　3

6　$6\sqrt{13}$ (cm^2)

≪解説≫



DE = AG = 6 cmより，△DEFで，EF = $\sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13}$ (cm)　ここで，右図のように，点GからAFに平行な直線を引き，BCとの交点をHとすると，△BGH≡△CEFになるので，四角形HFEGは四角形BCEGと面積が等しい。このとき，四角形HFEGは平行四辺形で，AB∥DCより，∠BAE =∠DEA = 90°なので，四角形HFEGの底辺をEFとすると，高さはAG。よって，求める面積は，$\sqrt{13} \times 6 = 6\sqrt{13}$ (cm^2)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

7　(1) 15°　(2) ① $\frac{25}{9}$（倍）　② 6π（cm^2）

≪解説≫

(1) $\angle CSR = \angle ASP = 30°$　SR = SCより，$\angle SRC = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$　よって，$\angle CRQ = 90° - 75° = 15°$

(2) ① △SPCで，$\angle SCP = 90°$，SP = SA = 10cm，PC = 10 − 2 = 8（cm）だから，三平方の定理より，$SC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$（cm）　△SAPと△SCRで，SA：SC = SP：SR = 5：3，$\angle ASP = \angle CSR$より，2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから，△SAP∽△SCR　よって，相似比は5：3より，面積比は，△SAP：△SCR = $5^2 : 3^2$ = 25：9となるから，△SAPの面積は△SCRの面積の $\frac{25}{9}$ 倍。② CS = CR = RSより，$\angle CSR = 60°$だから，図3では60°回転させたことになる。また，$SB = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136}$（cm）　ここで，線分BS，QSを引くと，図3の図形全体の面積は，△ABS + △SQR + おうぎ形SBQ = $\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times 2 + \pi \times (\sqrt{136})^2 \times \frac{60}{360} = \frac{68}{3}\pi + 60$（$cm^2$）この面積から長方形PQRSとおうぎ形SAPの面積をひけば求める面積となる。よって，$\frac{68}{3}\pi + 60 - 6 \times 10 - \pi \times 10^2 \times \frac{60}{360} = 6\pi$（$cm^2$）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。